OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\frac{1}{2^x+9^x}+\frac{1}{3^x+4^x}+\frac{1}{6^x+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{6^x}\right)$.

Marian Cucoaneș, GM 2/2014

2. Să se arate că dacă $x=\log_2 6$ și $y=\log_3 6$, atunci au loc relațiile:

a) $x + y = xy$, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$;

b) $x^2 + y^2 > 8{,}81$.

Traian Sfetcu

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$. Să se rezolve ecuațiile $f(x) = 1$, $f(x) = 3$.

. Să se discute în funcție de valorile lui $\alpha\in\mathbb{R}$, numărul soluțiilor ecuației $f(x) = \alpha$.

Traian Sfetcu

4. Fie $z_1=x-y\varepsilon$, $z_2=y-z\varepsilon$, $z_3=z-x\varepsilon$, numere complexe cu $|z_1|=1, |z_2|=2, |z_3|=3$ unde x, y, z sunt reale, diferite și ε este o rădăcină de ordin trei a unității diferită de 1. ($\varepsilon^3=1$, $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$).

a) Să se arate că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

b) Dacă $xy + yz + zx = 0$, să se calculeze aria triunghiului.

Traian Sfetcu

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.